

## Lista 6 (poziom podstawowy)

**Zad. 1 (1 pkt.)** Ile jest wszystkich różnych liczb naturalnych pięciocyfrowych, które w zapisie dziesiętnym mają wszystkie cyfry różne?

**Zad. 2 (1 pkt.)** Funkcja  $f$  jest określona wzorem  $f(x) = -\log(1/x)$  dla wszystkich liczb rzeczywistych dodatnich  $x$ . Oblicz wartość funkcji  $f$  dla argumentu  $x = \sqrt{10}$ .

**Zad. 3 (1 pkt.)** Rozwiązaniem nierówności kwadratowej  $(-3x - 9)(x + 6m) > 0$ , z niewiadomą  $x$  i parametrem  $m \in \mathbb{R}$ , jest przedział  $(-3, 3)$ . Znajdź wartość parametru  $m$ .

**Zad. 4 (3 pkt.)** Wykresem funkcji kwadratowej  $f(x) = ax^2 + bx + c$  jest parabola, której wierzchołek ma współrzędne  $(5, -3)$ . Jeden z punktów przecięcia paraboli z osią  $Ox$  układu współrzędnych ma współrzędne  $(4, 0)$ . Zapisz zbiór wszystkich wartości funkcji  $f$  oraz wyznacz wzór funkcji kwadratowej  $f$  w postaci kanonicznej.

**Zad. 5 (1 pkt.)** Dana jest funkcja kwadratowa  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , gdzie  $a \neq 0$  oraz  $c > 0$ . Funkcja  $f$  nie ma miejsc zerowych. Czy wykres tej funkcji leży w całości nad czy pod osią  $Ox$ ?

**Zad. 6 (1 pkt.)** Rozwiąż geometrycznie układ równań 
$$\begin{cases} y = x - 2 \\ y = -x + 2 \end{cases}$$

**Zad. 7 (2 pkt.)** Wykaż, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $5n^2 - 15n$  jest podzielna przez 10.

**Zad. 8 (3 pkt.)** Udowodnij, że dla każdej liczby naturalnej  $n$  liczba  $n^4 + 2n^3 - n^2 - 2n$  jest podzielna przez 12.

**Zad. 9 (1pkt.)** Dany jest kwadrat  $ABCD$  o boku długości 10. Z wierzchołka  $A$  zakreślono koło o promieniu równym długości boku kwadratu. Oblicz pole powierzchni części wspólnej koła i kwadratu.

**Zad. 10 (2 pkt.)** Przekątne równoległoboku  $ABCD$  mają długości  $|AC| = 20$  oraz  $|BD| = 16$ . Wierzchołki rombu  $EFGH$  leżą na bokach równoległoboku  $ABCD$ . Boki tego rombu są równoległe do przekątnych równoległoboku. Oblicz długość boku rombu  $EFGH$ .

**Zad. 11 (2 pkt.)** Sześciokąt foremny  $ABCDEF$  ma pole równe  $10\sqrt{3}$ . Oblicz długość odcinka  $AE$  oraz pole trójkąta  $ABE$ .

**Zad. 12 (1 pkt.)** W trapezie  $ABCD$ , o wysokości równej 12, przekątne  $AC$  i  $BD$  przecinają się w punkcie  $E$  oraz  $AB \parallel CD$ . Obwód trójkąta  $ABE$  jest równy 48, natomiast obwód trójkąta  $CDE$  jest równy 12. Oblicz wysokość trójkąta  $ABE$  poprowadzoną z punktu  $E$ .

**Zad. 13 (2 pkt.)** Znajdź punkty przecięcia okręgu o równaniu

$$(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 15$$

z osiami układu współrzędnych  $Oxy$ .

**Zad. 14 (2 pkt.)** Wierzchołki podstawy  $ABCD$  sześcianu  $ABCDEFGH$ , o krawędzi długości 12, połączono odcinkami z punktem  $P$ , który jest punktem przecięcia przekątnych podstawy  $EFGH$ . Oblicz objętość otrzymanego ostrosłupa prawidłowego czworokątnego  $ABCDP$  oraz cosinus kąta nachylenia krawędzi bocznej ostrosłupa do płaszczyzny podstawy.

**Zad. 15 (1 pkt.)** Dany jest sześcian o objętości  $V$ . Oblicz objętość sześcianu podobnego, którego krawędź została zwiększona cztery razy.